1. tétel
Halmazok és halmazok számossága. Halmazműveletek és logikai műveletek kapcsolata.

HALMAZOK
A halmaz axiomatikus fogalom, nincs definíciója. A „benne van” valami a halmazban szintén axiomatikus fogalom, (de feltételek vannak, például az egyértelműen eldönthetőség.)

<u>Def:</u>Üreshalmaz: Létezik az üres halmaz: olyan halmaz, aminek nincs eleme → $\forall$a: a $\notin \emptyset$

<u>Def:</u>Alaphalmaz: Az alaphalmaz megállapodás szerint azon dolgok halmaza, amelyekkel éppen dolgozunk (önkényes fogalom.)
Az alaphalmazon kívül mindig vannak elemek, de azokat az adott feladatban vagy fogalmi rendszerben nem vesszük figyelembe.
Nem létezik minden dolgok halmaza(mindent összefoglaló halmaz), ez logikai ellentmondáshoz vezetne, (önmagát is tartalmaznia kéne, mint elem.)

(<u>Jelölése és megadása a halmaznak</u>
A halmazokat általában latin nagybetűkkel jelöljük.
A halmazokat megadhatjuk:
- felsorolással: pl.: $H \coloneqq \{1; 2; 3; 4; 5\}$
  - csak akkor lehetséges, ha a halmaz véges vagy egyértelműen folytatódik (pl. természetes számok halmaza)
- egyértelmű hozzárendelés megadásával, ami alapján az alaphalmaz minden eleméről eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak. Ez lehet pl.: egyenlet; szöveg: „páros számok”, vagy $H \coloneqq \{n \in Z |\ 2|n\ \}$

Így adhatunk meg egy halmazt, mindazonáltal egy halmaz nem attól halmaz, hogy meg tudjuk adni egy tulajdonságával.

Halmazok ábrázolásához leggyakrabban Venn-diagramokat használunk – maximum 3 halmaz esetén.)

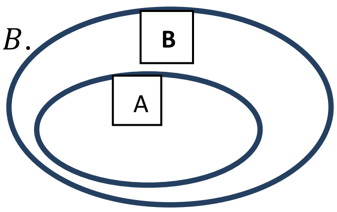
<u>Alapvető definíciók</u>
<u>Def:</u>2 halmaz egyenlősége:
Két halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, amik az egyiknek elemei, azok és csakis azok elemei a másiknak.

A és B halmazokra: A=B⇔ $\forall a: a \in A \Rightarrow$ a $\in$ B
Ez a logikai ekvivalenciának felel meg.

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B \wedge \forall b \in B \Rightarrow b \in A$ (azaz $\forall$ a eleme A-ra $\Rightarrow$ a eleme B-nek és fordítva)
(Ekvivalencia két következtetésből.)

<u>Def:</u>Részhalmaz:

A részhalmaza B-nek, ha A minden eleme eleme B-nek is: $\forall a: a \in A \Rightarrow a \in B$.
(Definícióból következően az üres halmaz mindennek részhalmaza.)
Valódi részhalmaz: $A \subset B$
Ha lehet egyenlő is: $A \subseteq B$
Logikai „rokona” a következtetés (implikáció) A⇒B



Ha A=B $\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow$ A halmazok egyenlősége ekvivalens azzal, hogy az A részhalmaza a B-nek ÉS B részhalmaza az A-nak. (Halmazok egyenlőségét gyakran így bizonyítják.

<u>Tétel:</u> n elemű halmaz összes részhalmazainak száma = 2^n
<u>Bizonyítás:</u>Soroljuk fel az elemeket! Ha részhalmazokat akarunk képezni, akkor az eredeti halmaz minden eleménél kétféleképpen dönthetünk.

		1. elem;	2. elem,	3.elem;	4. elem; …. ; n. elem
Benne van-e a	igen	-	✓	-	
részhalmazban?	nem	✓	-	✓	

Mivel n elem van, 2^nlehetséges döntéssorozat. Minden egyes döntéssorozat különböző részhalmazt határoz meg. (Ezek között benne van maga a halmaz és az üreshalmaz is.) => 2^ndb részhalmaz lesz.
Viszont: A részhalmazok száma megszámlálható úgy is, hogy külön megszámoljuk a 0 elemű, 1 elemű, 2 elemű, stb… halmazokat.

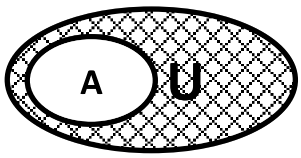
0 elemű: $\binom{n}{0}$
1 elemű: $\binom{n}{1}$ ismétlés nélküli kombináció (nincs sorrend, nincs ismétlődés)
n elemű: $\binom{n}{n}$

- ⇨ összes: ezek összege, így: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

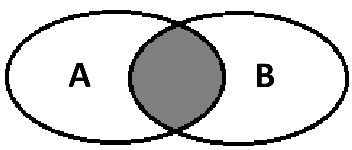
<u>Def:</u> Diszjunkt halmazok:
Két halmaz diszjunkt, akkor ha nincs közös elemük, azaz metszetük az üres halmaz.

HALMAZMŰVELETEK
A halmazműveleteket halmazok között végezzük és halmazt kapunk eredményként.

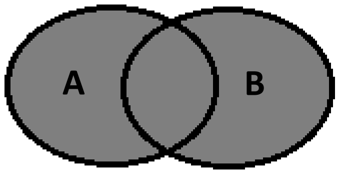
Def: Komplementer
Egyváltozós művelet. Képzéséhez szükséges az alaphalmaz megadása. A halmaz komplementere $\bar{A}$.$\bar{A}$-nak eleme az alaphalmaz összes olyan eleme, ami nincs benne A-ban. $\bar{A}$is halmaz.
$\bar{A} \coloneqq \{a \in U | a \notin \mathrm{A}\}$
Logikai megfelelője a tagadás (negáció, jele:¬)



Def: Metszet (jele: $\cap$)
Kétváltozós művelet. A és B halmaz metszete az a halmaz, amelynek eleme minden olyan elem, amely benne van A-ban és B-ben is.
$A \cap B \coloneqq \{\forall x \in A | x \in B\} = \{x \in A \wedge x \in \mathrm{B}\}$
Műveleti tulajdonságok:
Kommutatív (felcserélhető):$(A \cap B = B \cap A)$
Asszociatív (átzárójelezhető):$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ =
Az unióra nézve disztributív (széttagolható): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Nincs szükség az alaphalmaz ismeretére, a kát halmazon belül maradunk.
A metszet a logikai „*és*”-nek felel meg.

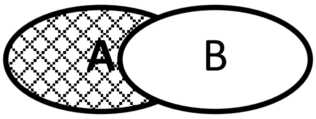


<u>Def:</u> Unió(jele: $\cup$)
(Ennél a műveletnél nincs szükség az alaphalmaz ismeretére, a két halmazon belül maradunk.)
A és B halmaz uniója az a halmaz, amelyben benne vannak mindazon elemek, amelyek benne vannak A-ban vagy B-ben, azaz legalább az egyik halmazban.

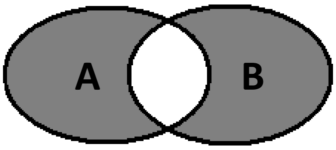


$A \cup B \coloneqq \{x \in A \vee x \in B\}$
Műveleti tulajdonságok: Kommutatív, asszociatív,
a metszetre nézve disztributív: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Az unió logikai megfelelője a „*vagy*”.

Def: Különbség(jele: \ )
A és B különbsége az a halmaz, aminek az elemei mindazok az elemek, amelyek benne vannak A-ban, de nincsenek benne B-ben.
$A \setminus B \coloneqq \{\forall x \in A | x \notin B\}$ $\qquad A \setminus B = A \cap \bar{B}$
Nem asszociatív, nem kommutatív.
$(\bar{A} = U \setminus A)$
Logikai megfelelője: $A \wedge \neg B$

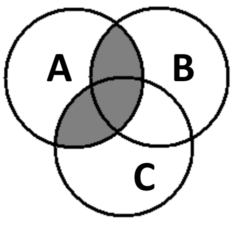


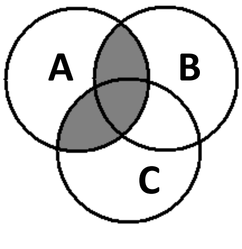
Def: Szimmetrikus különbség (jele: Δ**)**
A Δ B azoknak az elemeknek a halmaza, amelyekA vagy B halmaz közül pontosan az egyikben vannak benne.
$A \Delta B \coloneqq \{\forall x \in A | x \notin B\} \cup \{\forall x \in B | x \notin A\} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) =$
$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Logikai megfelelője a „*kizáró vagy*”.



AZONOSSÁGOK
Tétel: Disztributív azonosság I.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

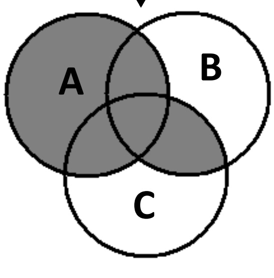
Biz:

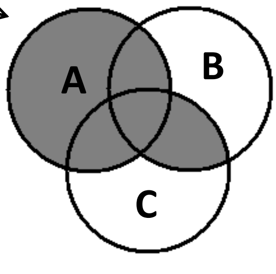




Tétel: Disztributív azonosság II.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Biz:





Tétel: De Morgan azonosság I.
$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B} \rightarrow \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

Tétel: De Morgan azonosság II.
$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B} \rightarrow \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A következők a definíciókból azonnal következnek.

$\bar{\bar{A}} = A$	$\bar{\emptyset} = U$	$\bar{U} = \emptyset$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	$A \setminus A = \emptyset$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	$A \setminus \emptyset = A$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap A) = A \\ A \cap (B \cup A) = A \end{array}\right\} \text{Elnyelési tulajdonság}$$

HALMAZOK SZÁMOSSÁGA
Halmaz számossága a halmaz elemeinek száma.

A számosság lehet

véges

végtelen

megszámlálhatóan végtelen

nem megszámlálhatóan végtelen

megszámlálható

Jelölése: $|A|$
Def: Két halmazt egyenlő számosságúnak nevezünk, ha elemeik között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, (azaz párbaállíthatóak.)

1. Véges
Számolni a természetes számokkal szoktunk (Z^+). Halmaz elemeinek megszámolás: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a halmaz elemei és a természetes számok (Z^+) egy kezdőszelete között.
Pl.: adott $H \coloneqq \{a; b; c; d\}$ halmaz → kölcsönösen egyértelmű hozzárendeléssel a természetes számokkal ($N \coloneqq \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ megfeleltetjük.

1-a
2-b
3-c
4-d → A halmaznak 4 eleme van.

2. Megszámlálhatóan végtelen
Def: A természetes számok halmazát megszámlálhatóan végtelennek nevezzük.
Megszámlálhatóan végtelen számosságúnak azokat a halmazokat nevezzük, amelyek elemei a természetes számokkalpárba állíthatók, vagy máshogy: sorozatba rendezhetők.

Pl.: Véges számú racionális szám sorrendbe rakható, tehát ugyanannyian vannak, mint az egészek.
példák: Z; N; páros számok; prímszámok; racionális számok halmaza

3. Nem megszámlálhatóan végtelen
Def: Nem megszámlálhatóan végtelen számosságúnak azokat a halmazokat nevezzük, amelyek elemei a természetes számokkal párba nem állíthatók, számosságuk nagyobb, mint a természetes számok halmazának számossága.

pl.: $R; I = R\setminus Q = \bar{Q}$

[0;1] – bármilyen kicsi valós intervallum nem megszámlálhatóan végtelen számosságú

Tétel: Ha $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$, ha $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$.

Tétel: Számolás halmazok elemszámával: logikai szita.

- 2 halmazra:

  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 3 halmazra:

  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$
- n halmazra:

  $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - (\overbrace{|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|}^{\binom{n}{2}\, db}) +$

  $+(\underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|}_{\binom{n}{3}\, db}) \mp \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

Alkalmazások

- A halmazok a matematika alapja. Minden egyenlet megoldásban, függvények elemzésekor bizonyos halmazokból választjuk ki a megoldást→ alaphalmaz, megoldáshalmaz.
  - Oszthatósági feladatokban – szita formula
  - Geometrián belül („bizonyos pontok halmaza a síkon” pl.)
  - Függvény értelmezés: értelmezési tartomány, értékkészlet is halmazok
  - Valószínűségszámításon belül (eseménytér az alaphalmaz, ennek elemei az elemi események, tetszőleges részhalmaz az esemény). Az események között halmazalgebrát értelmezünk.
  - logika – informatika, számítástechnika → alaplapi programozás – logikai „kapuk”, logikai műveletek
  - elektronika → logika
  - Agatha Christie – detektívregényekben a gyilkosság eseményeinek feltérképezése → logika